1036. Vector lattice ニ於ケル作用素ノ擴大定理

小笠原 藤次郎(広島文理大)

汎函数ノ諸種ノ拡大定理ハ vector 値函数ノソレヘ適當ナ修正ニヨッテ一般化ノ可能性ハ Kantorovitch ニ於テ既知ノコトデアルガ同氏ノ論分ガ未発表デアリ又コレ等ノ問題ハ一度ハ考ヘラレルベキモノデアリ自分ノ「ノート」ノ整理ノタメニコヽニ纏メテ見タイ。Hahn-Banach ノ定理。正作用素ノ拡大。或ル種ノ連続性ヲ保存スル拡大。大体コノ三ツニ分ケテ論ズル。

§1. Hahn-Banach ノ定理.

定理1. X ヲ線型空間, Y ヲ complete vector lattice トスル. $p(x)$ ヲ X上デ定義サレ Y ヲ値域トスル

函数デ次ノ性質ヲモツモノトスル。

$p(x_1+x_2) \leqq p(x_1)+p(x_2)$, $t \geqq 0$ ノトキ $p(tx)=tp(x)$

今 $f(x)$ ガ X ノ部分線型空間 X_0 上デ定義サレタ Y ヲ値域トスル additive, homogeneous ナ函数デ且ツ X_0 上デ $f(x) \leqq p(x)$ ガ成立スルトスル。コノトキ X 上デ定義サレタ Y ヲ値域トスル次ノ性質ヲモツ additive homogeneous ナ函数 $F(x)$ ガ存在スル。

$x \in X$ ノトキ　$F(x) \leqq p(x)$,　$x \in X_0$ ノトキ $F(x)=f(x)$

(証)　Banach ノ本 27－29 頁参照.

定理 2. 定理 1 ニ於テ X ガ vector lattice デ $p(x)$ ガ更ニ次ノ條件ヲ満足スルトキ $F(x)$ ハ regular トナル。

$$|x_1| \leqq |x_2| \text{ ノトキ } \quad p(x_1) \leqq p(x_2)$$

(証)　x ヲ任意ノ正要素トシ, $0 \leqq |x_1| \leqq x$ ノトキ $|F(x_1)| \leqq p(x)$ ガ成立スルカラ $\{F(x_1)\}$ ハ (0)－有界トナリ従テ $F(x)$ ハ regular トナル。

Y ヲ complete vector lattice トスルトキ $y_1+y_2 i$ ノ全体ヲ $Y+iY$ 或ハ Z ト書ク. 茲ニ $y_1, y_2 \in Y$ 且ツ y_1 ヲ y_1+iy_2 ノ実部分ト云ヒ

$$|y_1+iy_2| = \bigvee_{c_1^2+c_2^2=1} (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

即チ $\sqrt{y_1^2+y_2^2}$ デ定義スル。

定理 3. X ヲ complex normed space, Y ヲ complete vector lattice, $Z=Y+iY$ トスル。

$p(x)$ ヲ次ノ條件ヲ滿足スル Y ヲ値域トスル函數トス。
$p(x) = p(\|x\|)$, $p(x_1 + x_2) \leqq p(x_1) + p(x_2)$, $t > 0$ ノトキ $p(tx) = t\,p(x)$.

今 $f(x)$ ヲ X ノ複素部分線型空間 X_0 上デ定義サレタ Z ヲ値域トスル複素線型函數デ $|f(x)| \leqq p(x)$ ヲ滿足スルモノトス。コノトキ X 上デ定義サレタ Z ヲ値域トスル複素線型函數 $F(x)$ ガ存在シテ $x \in X$ ノトキ $|F(x)| \leqq p(x)$, $x \in X_0$ ノトキ $F(x) = f(x)$。

(證) Bohnenblust, Sobczyk, Bull. A. M. S. 44 (1938) 參照. $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ ヲ $f(x)$ ノ實及ビ虚部分トスレバ $f_2(x) = -f_1(ix)$ $x \in X$ ガ容易ニ分ル。而モ $|f_1(x)| \leqq |f(x)| \leqq p(x)$ ガ成立スルカラ定理ノニヨル $f_1(x)$ ノ擴大ヲ $F_1(x)$ ト置キ $F(x) = F_1(x) - i F_1(ix)$ ト置イタモノガ問題ノ $F(x)$ デアルコトヲ證スレバヨイ。

$x \in X_0$ ノトキ $f(x) = F(x)$ ハ自明. $F_1(e^{i\alpha}x) = \cos\alpha \cdot F_1(x) + \sin\alpha \cdot F_1(ix)$ ヨリ

$$|\cos\alpha \cdot F_1(x) + \sin\alpha \cdot F_1(ix)| \leqq p(e^{i\alpha}x) - p(x)$$

從ッテ l.u.b. ヲトレバ $|F(x)| = \sqrt{F_1^2(x) + F_1^2(ix)} \leqq p(x)$ トナル。

定理4. X ヲ σ-complete vector lattice, $W = X + iX$ トシ Y ヲ complete vector lattice $Z = Y + iY$ トスル. $p(w)$ ヲ W 上デ定義セラレタ Y ヲ値域トスル次ノ性質ヲモツ函數トスル。$p(w) = p(|w|)$,

$p(w_1+w_2) \leqq p(w_1)+p(w_2)$. $t \geqq 0$ ノトキ $p(tw)=tp(w)$ 今 $f(w)$ ヲ W ノ複素部分線型空間 W_0 上デ定義サレ Z ヲ値域トスル複素線型函数トシ $|f(w)| \leqq p(w)$ ガ成立スルモノトスル。コノトキ W 上デ定義サレタ Z ヲ値域トスル複素線型函数 $F(w)$ ガ存在シテ $w \in W_0$ ノトキ $F(w)=f(w)$. $w \in W$ ノトキ $|F(w)| \leqq p(w)$

（証） 定理3ノ証明ト同様。

定理3ノ証明カラ分ルヤウニ X ガ複素線型空間デ $p(x)=p(e^{i\alpha}x)$ ガ満足サレルコトガ此等ノ定理ノ説明ニ充分デアル。

§2.

定理5. X ヲ vector lattice, X_0 ヲ X ノ部分線型空間, X ノ任意ノ要素ハ X_0 ノ要素デ majorize サレル（即チ $x \in X$ ノトキ $x_0' \leqq x \leqq x_0''$ ナル $x_0', x_0'' \in X_0$ ガ存在スル）コノトキ X_0 上ノ正要素ニ対シ正値（0ヲ含メテ）ヲトル complete vector lattice Y ヲ値域トスル additive homogeneous ナ函数 $f(x)$ ハ X 上ノ正ノ additive, homogeneous ナ函数ニ拡大サレル。

（証） Krein, Šmulian; Annals of Math. 41 (1940) 558頁 lemma ノ証明参照。

定理6. Archimedean vector lattice X 上デ定義サレタ正ノ additive homogeneous ナ函数（complete vector lattice ヲ値域トスル）ハ X ヲ含

ム最小ノ complete vector lattice 上ノ正ノ additive homogeneous ナ函数ニ拡大サレル。

§3.

Xヲ σ-complete vector lattice, Yヲ regular vector lattice. X_0ヲXノ sub-vector lattice（σ-complete ト仮定シナイコトニ注意）トスル. X_0上デ定義セラレタYヲ値域トスル regular ナ additive homogeneous ナ函数 $f(x)$ ガ X_0デ(o)-有界ナ$\{x_n\}$ガXデ $0=(o)$-収斂スルトキ$\{f(x_n)\}$ガ $0=(o)$-収斂スルトキ $f(x)$ノ正部分及ビ負部分ニツイテモ同様ノ性質ヲモツコトガ証明サレル（Yガ実数空間ノトキ Kantorovitch ガ証明シタ）。従ッテ $f(x)$ヲ最初カラ正トスル。

Saks ノ本ノ終リノ積分ノ部分ハ泉, 中村氏ニヨッテ lattice term デ翻訳サレタガ, コレハ値域空間ヲ regular vector lattice トシテモ成立スルコトガ容易ニ確メラレル. 即チ泉, 中村氏ノ形デ次ノ定理ガ成立スル。

定理 II. $f(x)$ ハ部分 vector lattice X_0上デ正ノ additive homogeneous ナYヲ値域トスル函数デ次ノ意味デ連続トスル。$x_n \in X_0$, $\{x_n\}$ガ X_0デ(o)-有界, Xデ $x_n \to 0\ (o)$ ノトキ $f(x_n) \to 0\ (o)$. コノトキ次ノ性質ヲモツX_0ヲ含ム σ-complete vector lattice Lガ存在シ $f(x)$ ハ次ノ性質ヲモツ L上ノ正ノ additive homogeneous ナ函数 $F(x)$ ニ拡大出来ル. $z \in L$, $F(z) = 0$, $|x| \leqq z$ ナラバ $x \in L$. $z_n \in L$. $z_n \uparrow z$ 且ツ $\{F(z_n)\}$ が有界ノトキ $z \in L$ 且ツ $F(z_n) \rightarrow F(z)$ (0)

(注) X ヲ σ-complete lattice-ordered group トシテ對應スル定理が得ラレル。